

Κβαντομηχανική II

Κωνσταντίνος Σφέτσος,
Καθηγητής Φυσικής

Τομέας Πυρηνικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής,
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφάλαιο 7: Ταυτοτικά σωματρία

15 Μαΐου 2021

Περιεχόμενα

- ▶ Γενική θεώρηση
- ▶ Κατασκευή κυματοσυναρτήσεων

Γενική θεώρηση

- ▶ Δύο ή περισσότερα σωματίδια είναι **ταυτόσημα** αν έχουν τις ίδιες **εγγενείς φυσικές ιδιότητες**, δηλαδή τη **μάζα**, το **ηλεκτρικό φορτίο** και την **ιδιοστροφομή**.
- ▶ Από εμπειρία, **μικροσκοπικά/στοιχειώδη σωματίδια** έχουν πλήρως **ισοδύναμες** φυσικές ιδιότητες.
- ▶ Στην **κλασική φυσική ταυτόσημα** σωματίδια είναι **διακρίσιμα** αν μετρήσουμε με ακρίβεια τη θέση τους.
- ▶ Αυτό είναι **αντίθετο** στους **κβαντικούς** νόμους. Τα σωματίδια **δεν παραμένουν** σε δεδομένες θέσεις μεταξύ μετρήσεων.
- ▶ Παρελθόντος του χρόνου, οι κυματοσυναρτήσεις τους **απλώνονται** και **επικαλύπτονται**. Άρα είναι **αδύνατο** να προσδιορίσουμε με **ακρίβεια** ποιο σωματίο αντιστοιχούσε στη θέση που μετρήθηκε προηγουμένως.
- ▶ Συμπεραίνουμε ότι στην **κβαντική φυσική ταυτόσημα** σωματίδια είναι **μη διακρίσιμα**.

Συμμετρία εναλλαγής

Θεωρούμε N σωματίδια, $i = 1, 2, \dots, N$. Έστω ξ_i η συντεταγμένη του i σωματιδίου που περιλαμβάνει:

- ▶ την θέση του $\mathbf{r}_i$
- ▶ την ιδιοστροφορμή του s_i
- ▶ το φορτίο του q_i και οποιονδήποτε άλλον κβαντικό αριθμό.

Τελεστής εναλλαγής P_{ij} : Δρα στην κυματοσυνάρτηση και **εναλλάσει** τα σωματίδια i και j

$$P_{ij}\Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = \Psi(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots) .$$

- ▶ Προφανώς ο τελεστής είναι **συμμετρικός**

$$P_{ij} = P_{ji} .$$

- Γενικά οι τελεστές P_{ij} δεν εναλλάσσονται

$$[P_{ij}, P_{kl}] \neq 0 .$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} P_{12}P_{14}\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= P_{12}\Psi(\xi_4, \xi_2, \xi_3, \xi_1) = \Psi(\xi_2, \xi_4, \xi_3, \xi_1) , \\ P_{14}P_{12}\Psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) &= P_{14}\Psi(\xi_2, \xi_1, \xi_3, \xi_4) = \Psi(\xi_4, \xi_1, \xi_3, \xi_2) , \end{aligned}$$

- Προφανώς $P_{ij}^2 = \mathbb{I}$. Άρα ο P_{ij} έχει τις ιδιοτιμές ± 1 , δηλαδή

$$P_{ij}\Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = \lambda \Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) , \quad \lambda = \pm 1 .$$

- Η $\lambda = +1$ αντιστοιχεί σε συμμετρικές κυματοσυναρτήσεις

$$\Psi_s(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = \Psi_s(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots) , \quad \forall i, j$$

και η $\lambda = -1$ αντιστοιχεί σε αντισυμμετρικές

$$\Psi_a(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots) = -\Psi_a(\xi_1, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots) , \quad \forall i, j .$$

Κατασκευή κυματοσυναρτήσεων

Συστήματα μη αλληλεπιδρώντων διακριτών σωματιδίων

- Για **μη αλληλεπιδρώντα** σωματίδια

$$H = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + V(\xi_i) \right) .$$

Φυσικά $[H_i, H_j] = 0$.

- Η **ολική κυματοσυνάρτηση** είναι

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) = \Psi_1(\xi_1) \cdots \Psi_i(\xi_i) \cdots \Psi_N(\xi_N) ,$$

όπου $H_i \Psi_i(\xi_i) = E_{n_i} \Psi_i(\xi_i)$.

- Η **ολική ενέργεια** είναι

$$E_{n_1, \dots, n_N} = \sum_{i=1}^N E_{n_i} .$$

Συστήματα ταυτόσημων σωματιδίων

Πειραματικά, τα σωματίδια έχουν:

- ▶ είτε **ακέραιο σπιν** $0, \hbar, 2\hbar, \dots$ και ονομάζονται **μποζόνια**.
π.χ. φωτόνια, μποζόνια- W, Z (στοιχειώδη), πιόνια, σωματίδια α (σύνθετα).
- ▶ είτε **ημι-ακέραιο σπιν** $\frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}, \dots$ και ονομάζονται **φερμιόνια**.
π.χ. ηλεκτρόνια, ποζιτρόνια, νετρίνα, κουάρκς (στοιχειώδη), πρωτόνια, νετρόνια (σύνθετα).
- ▶ Η κυματοσυνάρτηση **N ταυτοτικών μποζονίων** είναι **συμμετρική** ως προς την εναλλαγή οποιονδήποτε εξ' αυτών.
- ▶ Η κυματοσυνάρτηση **N ταυτοτικών φερμιονίων** είναι **αντισυμμετρική** ως προς την εναλλαγή οποιονδήποτε εξ' αυτών.

Το σπιν σύνθετων σωματιδίων καθορίζεται από αυτό των συνιστωσών τους.

- ▶ Τα μεσόνια είναι μποζόνια (2 κουάρκς), τα βαρυόνια είναι φερμιόνια (3 κουάρκς).
- ▶ Τα Ισότοπα ${}^4\text{He}$ (σωμάτιο- α) και ${}^3\text{He}$ του ατόμου του ηλίου: Το ${}^4\text{He}$ είναι μποζόνιο (2 πρωτόνια και 2 νετρόνια), ενώ το ${}^3\text{He}$ είναι φερμιόνιο (2 πρωτόνια και 1 νετρόνιο).
Αν και έχουν την ίδια θέση στο περιοδικό πίνακα των στοιχείων έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες.
π.χ. στους 2.17 Kelvin το ${}^4\text{He}$ γίνεται υπερευστό λόγω της συμπίκνωσης Bose-Einstein.
- ▶ Σε θεωρία πεδίου είναι δυνατόν να έχουμε καταστάσεις που συμπεριφέρονται ως φερμιόνια αν και τα συστατικά είναι μποζόνια, για τοπολογικούς λόγους (Skyrmions).

Κατασκευή συμμετρικών & αντισυμμετρικών καταστάσεων

- **2 Σωματία:** Έστω $\psi(\xi_1, \xi_2)$ μια κανονικοποιημένη ασυμμετρική κυματοσυνάρτηση. Τότε

$$\Psi_s(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\xi_1, \xi_2) + \psi(\xi_2, \xi_1)] ,$$

$$\Psi_a(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi(\xi_1, \xi_2) - \psi(\xi_2, \xi_1)] ,$$

- **3 Σωματία:** Έστω $\psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ μια κανονικοποιημένη ασυμμετρική κυματοσυνάρτηση. Τότε

$$\begin{aligned} \Psi_s(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} [& \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + \psi(\xi_1, \xi_3, \xi_2) \\ & + \psi(\xi_3, \xi_1, \xi_2) + \psi(\xi_2, \xi_1, \xi_3) + \psi(\xi_2, \xi_3, \xi_1) + \psi(\xi_3, \xi_2, \xi_1)] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} [& \psi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \psi(\xi_1, \xi_3, \xi_2) \\ & + \psi(\xi_3, \xi_1, \xi_2) - \psi(\xi_2, \xi_1, \xi_3) + \psi(\xi_2, \xi_3, \xi_1) - \psi(\xi_3, \xi_2, \xi_1)] . \end{aligned}$$

Εκφυλισμός εναλλαγής

- ▶ Η Χαμιλτονιανή N ταυτοτικών σωματιδίων και οι τελεστές που εναλλάσσονται με αυτή είναι **συμμετρικοί** ως προς την εναλλαγή δύο οποιονδήποτε σωματιδίων.
- ▶ Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$[H, P_{ij}] = 0 ,$$

δηλαδή, η συμμετρικότητα/αντισυμμετρικότητα **διατηρείται**.

- ▶ Έστω $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^N \mathbf{S}_i$ το ολικό σπιν N ταυτοτικών σωματιδίων σπιν s και $|s, s, \dots, s, S, M\rangle$ μια συμμετρική ή αντισυμμετρική ιδιοκατάσταση του $\mathbf{S}^2$ και της S_3 . Λόγω ότι

$$[\mathbf{S}, P_{ij}] = 0 ,$$

οι καταστάσεις $S_-^m |s, s, \dots, s, S, M\rangle$ και $S_+^m |s, s, \dots, s, S, M\rangle$ θα είναι **επίσης** συμμετρικές ή αντισυμμετρικές.

- ▶ Καταστάσεις από **εναλλαγές** είναι **εκφυλισμένες**.

Καταστάσεις ταυτοτικών μή αλληλεπιδρώντων σωματιδίων

Έστω N ταυτοτικά μη αλληλεπιδρώντα σωματίδια.

- ▶ Η Χαμιλτονιανή είναι

$$H = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\xi_i) \right) .$$

Έστω ότι

$$H_i \psi_i(\xi_i) = E_{n_i} \psi_i(\xi_i) .$$

- ▶ Η **ολική ενέργεια** είναι

$$E_{n_1, \dots, n_N} = \sum_{i=1}^N E_{n_i} .$$

- ▶ Αλλά για την **ολική κυματοσυνάρτηση**

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_N) \neq \psi_1(\xi_1) \cdots \psi_i(\xi_i) \cdots \psi_N(\xi_N) .$$

διότι $P_{ij} \Psi \neq \pm \Psi$.

- 2 ταυτοτικά μποζόνια: Αν $n_1 \neq n_2$, τότε

$$\begin{aligned}\Psi_s(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n_1}(\xi_1)\psi_{n_2}(\xi_2) + \psi_{n_1}(\xi_2)\psi_{n_2}(\xi_1)] , \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_P P \psi_{n_1}(\xi_1)\psi_{n_2}(\xi_2) .\end{aligned}$$

Αν $n_1 = n_2$, τότε $\Psi_s(\xi_1, \xi_2) = \psi_{n_1}(\xi_1)\psi_{n_1}(\xi_2)$.

Οι αθροίσεις γίνονται σε όλες τις δυνατές μεταθέσεις P .

- 2 ταυτοτικά φερμιόνια:

$$\begin{aligned}\Psi_a(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{n_1}(\xi_1)\psi_{n_2}(\xi_2) - \psi_{n_1}(\xi_2)\psi_{n_2}(\xi_1)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_P (-1)^P P \psi_{n_1}(\xi_1)\psi_{n_2}(\xi_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \det \begin{pmatrix} \psi_{n_1}(\xi_1) & \psi_{n_1}(\xi_2) \\ \psi_{n_2}(\xi_1) & \psi_{n_2}(\xi_2) \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Για άρτιο (περιττό) αριθμό μεταθέσεων $(-1)^P = 1(-1)$.

Αν $n_1 = n_2$, τότε $\Psi_a(\xi_1, \xi_2) = 0$.

- **N ταυτοτικά μποζόνια:** Αν $n_i \neq n_j, \forall i, j$, τότε

$$\Psi_s(\xi_1, \dots, \xi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P \psi_{n_1}(\xi_1) \cdots \psi_{n_N}(\xi_N)$$

Αν n_1 εμφανίζεται m_1 φορές, κλπ, με $\sum_{i=1}^N m_i = N$ τότε

$$\frac{1}{\sqrt{N!}} \rightarrow \sqrt{\frac{m_1! \dots m_N!}{N!}}$$

και γράφουμε μόνο τους διαφορετικούς όρους

- **N ταυτοτικά φερμιόνια:**

$$\begin{aligned} \Psi_a(\xi_1, \dots, \xi_N) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P P(-1)^P \psi_{n_1}(\xi_1) \cdots \psi_{n_N}(\xi_N) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_{n_1}(\xi_1) & \psi_{n_1}(\xi_2) & \cdots & \psi_{n_1}(\xi_N) \\ \psi_{n_2}(\xi_1) & \psi_{n_2}(\xi_2) & \cdots & \psi_{n_2}(\xi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n_N}(\xi_1) & \psi_{n_N}(\xi_2) & \cdots & \psi_{n_N}(\xi_N) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ορίζουσα Slater. Αν οποιαδήποτε δύο $n_i = n_j$ τότε $\Psi_a = 0$.

Ουσιώδεις διαφορές μποζονίων και φερμιονίων

Αν δύο σωματίδια βρεθούν στην ίδια κατάσταση τότε δύο γραμμές της Slater είναι ίδιες, η κυματοσυνάρτηση μηδενίζεται.

- ▶ **Αρχή Pauli:** Μια σωματιδιακή κατάσταση μπορεί να είναι κατειλημμένη σε κάθε χρονική απ' ένα φερμιόνιο το πολύ.
- ▶ Αυτή είναι η απαγορευτική αρχή του Pauli την οποία υπέθεσε προς εξήγηση του **περιοδικού πίνακα** των χημικών στοιχείων το 1925.
- ▶ **Συμπύκνωση Bose - Einstein:** Δεν υπάρχει όριο στο πόσο μποζόνια μπορούν να καταλάβουν μια σωματιδιακή κατάσταση.

Δύο ταυτόσημα μη αλληλεπιδρώντα σωματιδία με σπίν $\frac{1}{2}$

Έστω δύο διαφορετικές σωματιδιακές καταστάσεις ψ_1 και ψ_2 .

Οι δυνατές καταστάσεις του συστήματος είναι:

- ▶ Δύο καταστάσεις

$$\begin{aligned}\psi_{\pm}^{\text{triplet}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(x_1)|\pm\rangle_1 & \psi_1(x_2)|\pm\rangle_2 \\ \psi_2(x_1)|\pm\rangle_1 & \psi_2(x_2)|\pm\rangle_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2))|\pm\rangle_1|\pm\rangle_2 .\end{aligned}$$

- ▶ Γραμμικός συνδιασμός δύο ορθογώνιων καταστάσεων

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \det \begin{pmatrix} \psi_1(x_1)|+\rangle_1 & \psi_1(x_2)|+\rangle_2 \\ \psi_2(x_1)|-\rangle_1 & \psi_2(x_2)|-\rangle_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|-\rangle_2 + |-\rangle_1|+\rangle_2) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)) \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2)\end{aligned}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις έχουμε για τις τέσσερις καταστάσεις

$$\begin{aligned} |\Psi^{\text{triplet}}\rangle &= \psi_a(x_1, x_2) |\chi^{\text{triplet}}\rangle, \\ |\Psi^{\text{singlet}}\rangle &= \psi_s(x_1, x_2) |\chi^{\text{singlet}}\rangle. \end{aligned}$$

- Οι (αντι)συμμετρικές χωρικές κυματοσυναρτήσεις είναι

$$\psi_{s,a}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) \pm \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)] .$$

Αν $\psi_2 = \psi_1$, τότε $\psi_s(x_1, x_2) = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)$.

- Οι 4 καταστάσεις απ' τη σύνθεση 2 σπίν $\frac{1}{2}$ είναι

$$|\chi^{\text{singlet}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2) = |00\rangle .$$

$$|\chi^{\text{triplet}}\rangle = \left\{ \begin{array}{c} |+\rangle_1 |+\rangle_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2) \\ |-\rangle_1 |-\rangle_2 \end{array} \right\} = |1, m\rangle, \quad m = 1, 0, -1 .$$

- ▶ Η παραπάνω γραφή μπορεί να μας οδηγήσει στο **λανθασμένο** συμπέρασμα ότι για N μη αλληλεπιδρώντα η κυματοσυνάρτηση είναι πάντα γινόμενο του χωρικού μέρους και αυτό του σπίν.
- ▶ Αυτό μπορεί να γίνει μόνο για **δύο σωματίδια**

$$\text{Bosons :} \quad \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \left\{ \begin{array}{l} \psi_s(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi_s(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) , \\ \psi_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi_a(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) . \end{array} \right\}$$

$$\text{Fermions :} \quad \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = \left\{ \begin{array}{l} \psi_s(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi_a(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) , \\ \psi_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Psi_s(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) . \end{array} \right\}$$

- ▶ Αν τα σωματίδια είναι **3 ή περισσότερα** αυτό **δεν ισχύει**.
π.χ. δεν μπορεί να κατασκευάσουμε αντισυμμετρική κυματοσυνάρτηση με 3 σπιν $\frac{1}{2}$.